UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTREAL, QUEBEC H3C 3J7

PROBLÈMES DE LOCALISATION-DISTRIBUTION AVEC ÉQUILIBRAGE : ÉLÉMENTS DE MODÉLISATION ET PROPRIÉTÉS

par

Teodor Gabriel Crainic*, Pierre Dejax**
et Louis Delorme***

* Université du Québec à Montréal et Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

** École Centrale de Paris, 92295 Châtenay-Malabry Cedex, FRANCE.

*** Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

Cette recherche a été partiellement financée par le projet de coopération intégré Franco-Québécois No 20020687FQ.

Cette étude a été publiée grâce à une subvention du fonds F.C.A.R. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #490F

École Centrale de Paris - Rapport LEIS 86-07

Octobre 1986

Dépôt légal - 1er trimestre 1987

RÉSUMÉ

Nous énonçons le problème de la localisation des dépôts de véhicules, pour le transport interurbain de marchandises, afin de minimiser les coûts associés à l'ouverture et au fonctionnement des dépôts, les coûts des mouvements bidirectionnels clients-dépôts, ainsi que ceux des mouvements interdépôts, nécessaires pour rééquilibrer le réseau. Le modèle que nous proposons se présente comme une formulation de localisation de dépôts multiniveaux, multimodes, multiproduits, avec exigences d'équilibrage des charges des dépôts. Nous présentons certaines variantes de modélisation, nous analysons les propriétés des modèles et dégageons les perspectives algorithmiques les plus intéressantes.

Mots-clefs : localisation de dépôts, mouvements à vide,
équilibrage des charges de dépôt,
transport multimode multiproduit des marchandises

ABSTRACT

We present the problem of locating vehicle depots in an intercity freight transportation system with the objective of satisfying the client demand for empty vehicles, while minimizing the depot opening and operating costs, the bidirectional client-depot transportation costs, as well as the costs of the interdepot movements necessary to counter the unbalancing of demand. We propose a class of models which has the form of a two-echelon multimode multicommodity location formulation with interdepot balancing requirements. We analyse the models and their properties in order to bring forth the particular structure and characteristics that shall be used in subsequent algorithmic developments.

Key words : depot location, empty movement, empty balancing,
multimode multicommodity freight transportation

1. INTRODUCTION

Le problème qui se trouve à l'origine de nos recherches peut s'énoncer ainsi :

> Une entreprise de distribution ou transport livre à ses clients des marchandises à l'aide de véhicules de divers types. Pour chaque client l'entreprise connaît le nombre de véhicules pleins de chaque type à livrer. Lorsque reçus, les clients déchargent les véhicules, qui sont renvoyés à un dépôt. Les clients commandent aussi, pour leurs expéditions, des véhicules vides aux dépôts. Ces demandes sont également connues par l'entreprise. Une fois chargés, les véhicules sont transportés vers leur destination, normalement un autre point du réseau de l'entreprise, directement ou via leur dépôt d'origine ou un autre. Le transport peut s'effectuer par des modes (rail, route, mode combiné, etc.) dont les caractéristiques de coût, de temps de transport, etc. sont connues. Une complication majeure est due au fait que les demandes des clients entraîne un déséquilibre dans les disponibilités de véhicules vides entre les divers points du réseau de l'entreprise : certaines zones manquent de certains types de véhicules, tandis que des surplus sont enregistrés ailleurs. Ceci impose des transferts de véhicules vides entre les dépôts aux fins de rééquilibrage. Il faut donc localiser les dépôts des véhicules vides pour satisfaire les demandes et minimiser le coût total de structure, de fonctionnement et de transport clients- dépôts, dépôts-clients et interdépôts.

Ce problème appartient à la grande classe des problèmes de planification stratégique du réseau logistique de distribution de l'entreprise. L'originalité du problème provient du fait qu'il traite des mouvements à vide de véhicules (camions, wagons, conteneurs, etc.), ce qui implique des mouvements bidirectionnels dépôts-clients ainsi que des mouvements interdépôts, contrairement aux problèmes classiques de localisation-distribution où les mouvements sont unidirectionnels. A notre connaissance, il n'y a pas d'article traitant de ce problème, ni dans la littérature concernant

les déplacements à vide des véhicules (Dejax et Crainic, 1986), ni dans celle relative aux problèmes de localisation (Krarup et Pruzan, 1983; Cornuejols, Nemhauser et Wolsey, 1983; Aikens 1982).

Soulignons encore que le problème traité ne se situe pas au niveau de la planification opérationnelle à court terme. On suppose, en particulier, les offres et les demandes des clients agrégés sur une période relativement longue (par exemple l'année).

Tout dépendant de l'hypothèse concernant la nature des demandes et des temps de parcours, le problème est déterministe ou stochastique. Pour cette phase du projet, nous supposons que les données sont connues avec exactitude. L'étude du cas stochastique est prévue pour une phase ultérieure. Nous envisageons également dans un proche avenir traiter simultanément les mouvements de véhicules pleins et vides lors de la localisation : seuls les mouvements des véhicules vides sont considérés pour le moment. Le présent rapport se limite à l'étude des modèles sans capacité et à coûts linéaires.

Ce problème fut d'abord traité par Dejax et coll. (1986) dans le cadre d'une étude logistique du transport terrestre d'une grande compagnie européenne de transport (maritime et terrestre) de conteneurs. Ils ont abordé le problème en résolvant séquentiellement un problème de localisation classique (par l'algorithme de Erlenkotter (1978)), suivi d'un algorithme de flot à coût minimum pour déterminer les mouvements interdépôts. L'étude comportait également l'optimisation du transport des conteneurs pleins entre les ports, dépôts et clients par une méthode de type "plus court chemin". Notre projet est une continuation de ces travaux et son objectif est le traitement intégré des problèmes de localisation et de transport.

Le but spécifique de ce rapport est de présenter différentes formulations du problème, d'analyser leurs propriétés et de dégager les perspectives algorithmiques possibles.

Notons que la classe de problèmes de la théorie classique de localisation qui est la plus apparentée à celle que nous étudions est celle appelée "the simple plant location problem" (Krarup et Pruzan, 1983) ou "the uncapacitated facility location problem" (Cornuejols, Nemhauser et Wolsey, 1983). Nous référerons à cette classe en utilisant la notation de Krarup et Pruzan et en l'identifiant comme le problème SPLP.

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Seuls les mouvements à vide sont explicitement considérés dans le modèle. Ceci implique que pour chaque client on connaît son offre de véhicules vides de chaque type, ainsi que la demande pour chaque type de véhicule. Nous supposons également que les véhicules vides passent obligatoirement par un dépôt et qu'il n'y a donc pas de mouvements client-client. Aussi, puisqu'un horizon stratégique de planification est considéré, les offres et les demandes ne sont généralement pas simultanées. Par conséquent, les véhicules disponibles sont envoyés au dépôt et ne sont pas gardés pour satisfaire des demandes futures.

Soit

$C = \{i \mid \text{client}\}$

$n = |C|$

$D = \{j \mid \text{dépôt candidat}\}$

$m = |D|$

$P = \{p \mid \text{type de véhicule-produit}\}$

$\ell = |P|$

$T = \{t \mid \text{mode de transport}\}$.

Ces éléments forment un réseau conceptuel G = (N,A), souvent parallèle à un réseau physique. Les noeuds, ou sommets, sont les clients et les dépôts candidats : N = C U D. Les liens, ou arcs, représentent les mouvements possibles, par chaque mode, entre les dépôts, des dépôts aux clients, ainsi que des clients vers les dépôts :

$$A \subseteq (C \times D \times T) \cup (D \times D \times T) \cup (D \times C \times T)$$

Les arcs de l'ensemble CxC ne sont pas admis. Si certaines liaisons clients-dépôts ne sont pas permises, dans un sens quelconque, on supposera que les liens correspondants ne sont pas dans A.

Définissons

O_{ip}: offre au noeud i de véhicules de type p, $i \in C$, $p \in P$;

D_{ip}: demande au noeud i de véhicules de type p, $i \in C$, $p \in P$;

$y=(y_j)$: vecteur d'ouverture des dépôts

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{dépôt j ouvert} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad j \in D$$

$x=(x_{ijpt}, x_{jipt})$: vecteur des flots du produit p circulant par le mode t entre le client i et le dépôt j, $i \in C$, $j \in D$, $p \in P$, $t \in T$;

$w=(w_{jkpt})$: vecteur des flots du produit p circulant par le mode t entre les dépôts j et k, $j,k \in D$, $p \in P$, $t \in T$;

$f_j(y,x,w)$: fonction du coût d'ouverture et d'opération du dépot j, $j \in D$;

$c_{ijpt}(x)$ et $c_{jipt}(x)$: fonctions de coût de transport du produit p par le mode t entre le client i et le dépôt j, $i \in C$, $j \in D$, $p \in P$, $t \in T$;

$s_{jkpt}(w)$: fonction de coût de transport du produit p, par le mode t entre les dépôts j et k, $j,k \in D$, $p \in P$, $t \in T$.

Les formes fonctionnelles des coûts de transport déterminent le type de problème : linéaire ou non et, dans ce cas, concave, convexe ou

autre. Des fonctions linéaires sont les plus usuelles. Cependant, des fonctions concaves peuvent, par exemple, être utilisées pour modéliser les économies d'échelle qu'on retrouve souvent au niveau de la tarification.

Lorsque les coûts de transport sont linéaires et que le problème ne suppose pas de capacités explicites de transport (c'est notre cas), le trafic utilise toujours le moyen de transport de plus bas coût unitaire. Ainsi, pour simplifier la notation, nous ne conserverons dans ce qui suit qu'un seul arc, dans chaque direction, soit celui représentant le mode (ou la combinaison de modes) de transport avec le plus bas coût unitaire. Nous pouvons donc ignorer l'indice t dans la notation des variables et fonctions.

Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
c_{ijp}(x) &= c_{ijp}x_{ijp} && i\in C,\ j\in D,\ p\in P \\
c_{jip}(x) &= c_{jip}x_{jip} && j\in D,\ i\in C,\ p\in P \\
s_{jkp}(w) &= s_{jkp}w_{jkp} && j,k\in D,\ p\in P \\
f_j(y,x,w) &= f_j y_j && j\in D\ .
\end{aligned}
$$

Nous supposons également la non-négativité des coûts unitaires pour les trois classes de fonctions. Lorsque ce n'est pas le cas, de simples transformations, sans impact sur la solution optimale, peuvent être utilisées (Krarup et Pruzan, 1983).

Avant de présenter formellement les modèles, il est intéressant de noter que le problème étudié s'énonce également sous la forme, plus classique, d'un problème de localisation de dépôts à multiples échelons, usines-dépôts-clients, avec l'exigence d'équilibrage des charges des dépôts et saturation (utilisation stricte) de l'offre des "usines". La figure 1 illustre cette structure pour le cas unimodal, monoproduit. On remarque que, dans notre cas, on retrouve les clients tant à l'échelon (habituel) des clients demandeurs qu'à celui (plus inhabituel) des usines offrant le produit (véhicules). Cette forme du problème laisse présager

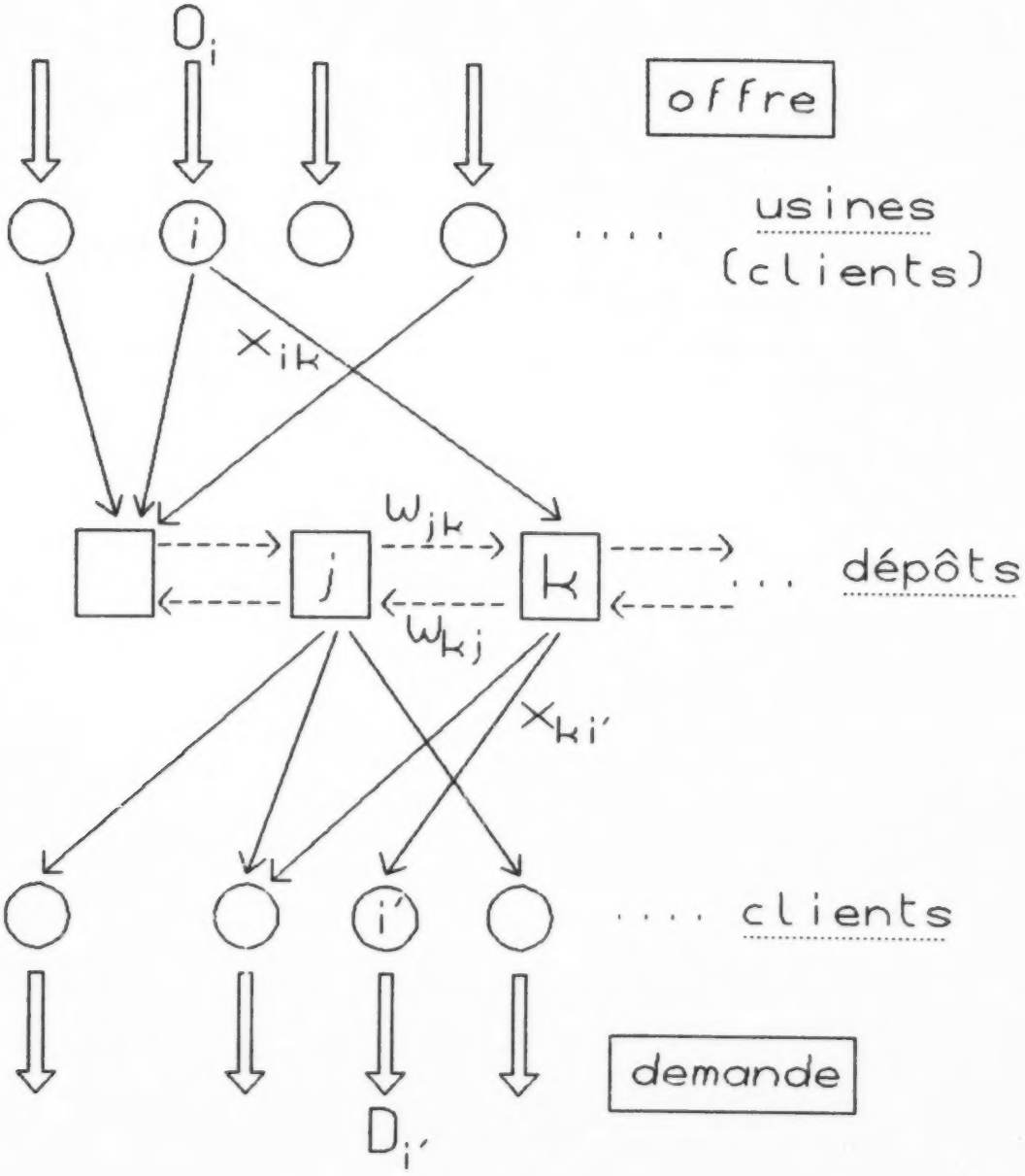


Figure 1 : Structure multi-échelon du problème

des applications intéressantes des modèles développés dans des domaines autres que la gestion des véhicules vides. Dans le présent rapport, nous n'allons cependant pas exploiter d'avantage la forme multi-échelon du problème, préférant l'identification plus aisée de la structure sous-jacente de réseau exhibée par l'énoncé initial.

3. LE MODÈLE LINÉAIRE NON RESTRICTIF

Le modèle de localisation-distribution avec équilibrage, multimode, multiproduit, s'écrit de la façon suivante :

$$(P1)\quad \text{Minimiser}\quad z = \sum_{j\in D} f_j y_j + \sum_{p\in P}\Big[\sum_{i\in C}\sum_{j\in D}(c_{ijp}x_{ijp}+c_{jip}x_{jip}) + \sum_{j\in D}\sum_{k\in D} s_{jkp}w_{jkp}\Big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P \quad (1)$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = D_{ip}$$

$$x_{ijp} \le My_j \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \quad (2)$$
$$x_{jip} \le My_j$$

$$w_{jkp} \le My_j \qquad \text{pour tout } j,k\in D,\ p\in P \quad (3)$$
$$w_{kjp} \le My_j$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \quad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P \quad (4)$$

$$x_{ijp} \ge 0 \qquad x_{jip} \ge 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$w_{jkp} \ge 0 \qquad \text{pour tout } j,k\in D,\ p\in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j\in D\ . \quad (5)$$

Les contraintes (1) assurent que les disponibilités et demandes des clients sont respectées, les contraintes (2) indiquent qu'il ne peut y

avoir d'échange entre les clients et les dépôts fermés (M est une constante positive, suffisamment grande), les contraintes (3) assurent que les échanges interdépôts ne s'effectuent qu'entre dépôts ouverts, tandis que les contraintes (4) représentent la conservation des flots aux dépôts.

Nous pouvons, sous certaines hypothèses, simplifier ce modèle. D'une part, les offres et demandes peuvent remplacer la constante M dans les contraintes (2). Ceci a l'avantage de resserrer le domaine réalisable. D'autre part, lorsque les coûts de transport interdépôts satisfont l'inégalité du triangle, les contraintes (3) sont redondantes et peuvent donc être éliminées de la formulation. Cette constatation est l'objet d'une première proposition :

Proposition 1 Lorsque les fonctions de coûts interdépôts dans le modèle (P1) vérifient :

$$s_{ikp} \leq s_{ijp} + s_{jkp} \qquad \text{pour tout } i,j,k \in D,\ p \in P \qquad (6)$$

alors les contraintes (3)

$$\left.\begin{aligned} w_{jkp} &\leq My_j \\ w_{kjp} &\leq My_j \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour tout } j,k \in D,\ p \in P$$

sont redondantes.

Preuve :

Appelons (P2) la formulation obtenue en enlevant les contraintes (3) à (P1).

Soit $v^* = (y^*, x^*, w^*)$ une solution optimale de (P2).

Montrons que, sous les hypothèses énoncées, ou v^* est aussi solution optimale de (P1), ou on peut en déduire une solution $\bar{v}$, qui soit également optimale pour (P1).

Deux cas sont possibles.

i) v^* vérifie les contraintes (3) de (P1). Alors v^* est solution optimale de (P1) car (P2) est une relaxation de (P1).

ii) v^* ne vérifie pas les contraintes (3).

Alors, il existe au moins $r \in P$, $\ell, h \in D$ tel que

$$w^*_{\ell hr} \neq 0 \quad \text{et} \quad y^*_\ell = 0.$$

Mais (par contraintes (2))

$$y^*_\ell = 0 \Rightarrow x^*_{i\ell p} = x^*_{\ell ip} = 0 \qquad \text{pour tout } i \in C,\ p \in P$$

donc

$$\sum_{i \in C} x^*_{i\ell p} = \sum_{i \in C} x^*_{\ell ip} = 0 \qquad \text{pour tout } p \in P$$

donc (par contraintes (4))

$$\sum_{k \in D} w^*_{k\ell p} - \sum_{k \in D} w^*_{\ell kp} = 0 \qquad \text{pour tout } p \in P$$

et en particulier

$$\sum_{k \in D} w^*_{k\ell r} - \sum_{k \in D} w^*_{\ell kr} = 0$$

avec

$$\sum_{k \in D} w^*_{k\ell r} \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k \in D} w^*_{\ell kr} \neq 0$$

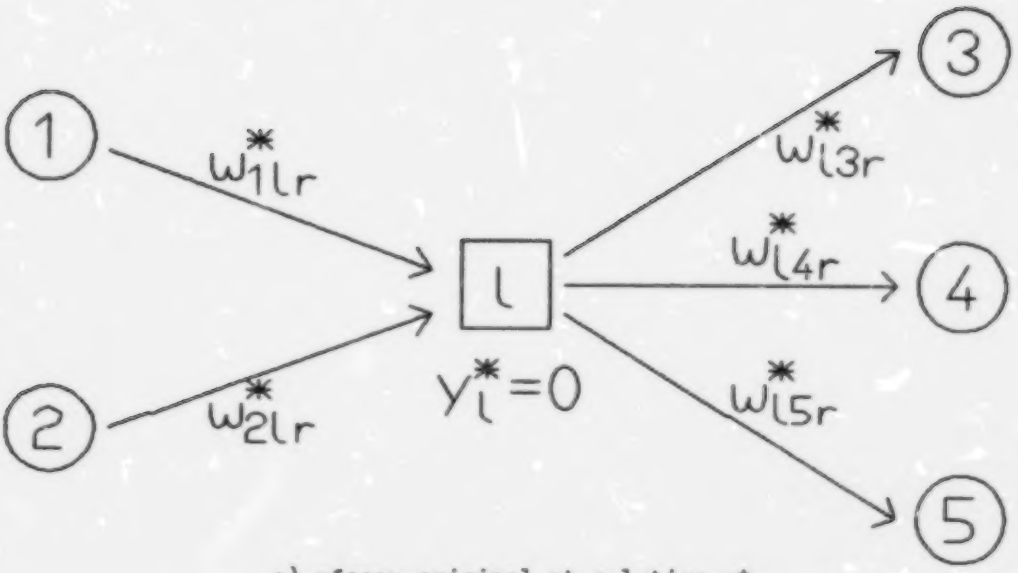
puisque, par hypothèse,

$$w^*_{\ell hr} \neq 0 \quad \text{et } w^*_{k\ell r} > 0,\ w^*_{\ell kr} > 0 \quad \text{pour tout } k \in D\ .$$

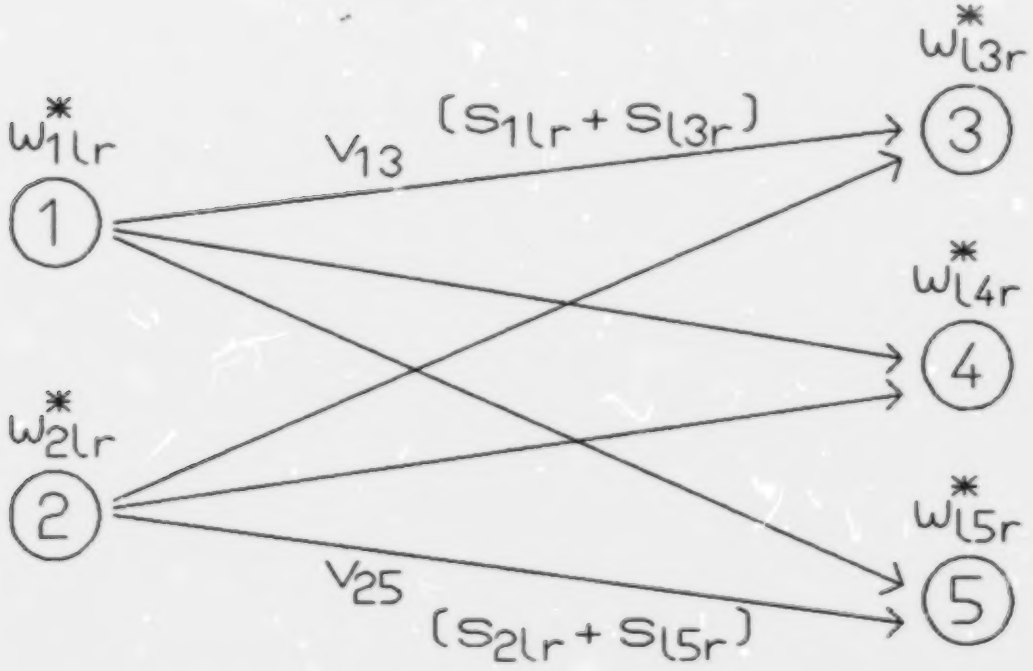
Soit alors les ensembles

$$D_I = \{k \mid w^*_{k\ell r} \neq 0\} \quad \text{et} \quad D_O = \{k \mid w^*_{\ell kr} \neq 0\}$$

et construisons le réseau de transport biparti $G = (N,A)$ (figure 2) où :



a) réseau original et solution v*



b) réseau de transport associé

Figure 2 : Exemple de construction du réseau de transport associé à une contrainte de type (3) violée.

- $N = D_I \cup D_0$
- $A = D_I \times D_0$
- demandes aux noeuds D_0 = les flots $w^*_{\ell kr}$
- offres aux noeuds D_I = les flots $w^*_{k\ell r}$
- coûts sur arcs $(k_1,k_2) \in A$ = $s_{k_1 \ell r} + s_{\ell k_2 r}$.

Une solution optimale du problème de transport, associé au réseau précédent, permet de construire une nouvelle solution $\bar{v} = (\bar{x},\bar{w})$ de (P1) avec $\bar{x} = x^*$ et $\bar{w}$ tel que

$$\bar{w}_{kjp} = \begin{cases} w^*_{kjp} & \text{si } (k,j) \in D^*, \quad \text{pour tout } p \\ 0 & \text{si } p=r,\ j=\ell,\ k \in D_I \text{ ou si } p=r,\ k=\ell,\ j \in D_0 \\ w^*_{kjp}+v^*_{kj} & \text{si } p=r,\ k \in D_I,\ j \in D_0 \end{cases}$$

où $D^* = DxD \setminus \{(k,j) \mid k \in D_I \cup \{\ell\},\ j \in D_0 \cup \{\ell\}\}$.

On a donc :

$$\sum_{p\in P} \sum_{k\in D} \sum_{j\in D} s_{kjp}\, \bar{w}_{kjp} = \sum_{p\in P} \sum_{(k,j)\in D^*} s_{kjp}\, w^*_{kjp} + \sum_{k\in D_I} \sum_{j\in D_0} s_{kjr}(w^*_{kjp}+v^*_{kj}) \ .$$

Or, par l'hypothèse d'inégalité du triangle (6) des coûts s_{kjp} :

$$\sum_{k\in D_I} \sum_{j\in D_0} s_{kjr} v^*_{kj} \leq \sum_{k\in D_I} \sum_{j\in D_0} (s_{k\ell r}+s_{\ell jr}) v^*_{kj}$$

$$= \Big(\sum_{k\in D_I} s_{k\ell r} \underbrace{\sum_{j\in D_0} v^*_{kj}}_{w^*_{k\ell r}}\Big) + \Big(\sum_{j\in D_0} s_{\ell jr} \underbrace{\sum_{k\in D_I} v^*_{kj}}_{w^*_{\ell jr}}\Big)$$

$$= \sum_{k\in D} s_{k\ell r} w^*_{k\ell r} + \sum_{j\in D} s_{\ell jr} w^*_{\ell jr}$$

D'où :

$$\sum_{p\in P}\sum_{k\in D}\sum_{j\in D} s_{kjp}\bar{w}_{kjp} \leq \sum_{p\in P}\sum_{k\in D}\sum_{j\in D} s_{kjp}w^*_{kjp}$$

$$\Rightarrow z(\bar{v}) \leq z(v^*)$$

De plus, puisque $\bar{v}$ est réalisable pour (P1), que (P2) est une relaxation de (P1) et que v^* est optimal pour (P2),

$$z(\bar{v}) = z(v^*) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire Lorsque

$$s_{ikp} \leq s_{ijp} + s_{jkp} \qquad \text{pour tout } p\in P,\ i,j,k\in D$$

une solution optimale au problème modifié (P2) est réalisable, donc optimale, pour le problème initial (P1).

Notons que la preuve de la proposition 1 fournit une méthode pour retrouver une solution au problème initial à partir d'une solution optimale du problème modifié, lorsque l'inégalité du triangle des coûts de transport interdépôts est satisfaite avec égalité. Pour simplifier la présentation, nous supposons dorénavant que l'inégalité stricte est vérifiée pour ces coûts.

Nous écrivons donc le modèle comme suit :

(L) Minimiser $z = \sum_{j\in D} f_j y_j$

$$+ \sum_{p\in P}\left[\sum_{i\in C}\sum_{j\in D}(c_{ijp}x_{ijp}+c_{jip}x_{jip}) + \sum_{j\in D}\sum_{k\in D} s_{jkp}w_{jkp}\right]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P \quad (1)$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = D_{ip}$$

$$x_{ijp} \leq O_{ip}y_j \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \quad (7)$$

$$x_{jip} \leq D_{ip}y_j$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \quad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P \quad (4)$$

$$x_{ijp} \geq 0 \qquad x_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$w_{jkp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } j,k\in D,\ p\in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j\in D \quad (5)$$

Une formulation équivalente, utile surtout pour simplifier l'écriture du problème dual, est le modèle "normalisé" :

(LN) Minimiser $z = \sum_{j\in D} f_j y_j$

$$+ \sum_{p\in P} \left[\sum_{i\in C} \sum_{j\in D} (c_{ijp} O_{ip} x_{ijp} + c_{jip} D_{ip} x_{jip}) + \sum_{j\in D} \sum_{k\in D} s_{jkp} w_{jkp} \right]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = 1 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = 1$$

$$x_{ijp} \leq y_j \qquad x_{jip} \leq y_j \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$\sum_{i\in C} O_{ip} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} D_{ip} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \quad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp} \geq 0,\ x_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$w_{jkp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } j,k\in D,\ p\in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j\in D$$

Remarquons que l'hypothèse d'inégalité du triangle de la proposition 1 est posée pour des coûts de même type, soit de transport (inter-dépôts) de longue distance caractérisé par des flots importants, "consolidés" sur des modes de transport efficaces pour de tels trajets.

C'est une hypothèse réaliste et presque toujours vérifiée en pratique. Ce n'est cependant pas le cas lorsqu'on examine l'ensemble des fonc-

tions de coût. Ainsi, il est souvent moins coûteux d'utiliser un itinéraire client/dépôt intermédiaire/dépôt final qu'une route directe du client au dépôt final, car le segment interdépôts est généralement parcouru de façon plus efficace que le segment client-dépôt final. Toutefois, lorsque l'inégalité du triangle est vérifiée pour l'ensemble des fonctions de coût (lorsque les coûts de transport sont proportionnels à la distance avec un même facteur multiplicatif pour tous les liens, par exemple), le problème se simplifie davantage.

Proposition 2 Lorsque dans le modèle (L), l'inégalité du triangle est vérifiée pour l'ensemble des fonctions de coût, en particulier lorsque $c_{ijp} + s_{jkp} \geq c_{ikp}$ pour tout $i \in C$, $j,k \in D$, $p \in P$, il existe une solution optimale pour (L) où $w_{jkp} = 0$ pour tout $j,k \in D$, $p \in P$.

Dans ce cas, le modèle peut s'écrire :

$$(LS) \quad \text{Minimiser} \quad z = \sum_{j \in D} f_j y_j + \sum_{p \in P} \sum_{i \in C} \sum_{j \in D} (c_{ijp} x_{ijp} + c_{jip} x_{jip})$$

sujet à

$$\sum_{j \in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i \in C,\ p \in P$$

$$\sum_{j \in D} x_{jip} = D_{ip} \qquad \text{pour tout } i \in C,\ p \in P$$

$$x_{ijp} \leq O_{ip} y_j \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$x_{jip} \leq D_{ip} y_j \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$\sum_{i \in C} x_{ijp} - \sum_{i \in C} x_{jip} = 0 \qquad \text{pour tout } j \in D,\ p \in P$$

$$x_{ijp} \geq 0,\ x_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j \in D.$$

Le modèle normalisé associé à cette formulation sera appelé (LNS).

Ce dernier modèle ne présente pas un grand intérêt pratique et ne fera donc pas l'objet d'études supplémentaires. Il peut cependant servir à souligner une des différences entre le problème que nous traitons et le

problème classique de localisation. Il est connu (voir, par exemple Krarup et Pruzan, 1983) que la formulation du problème simple de localisation sans capacités (SPLP) possède la propriété d'affectation unique : toute la demande d'un client est satisfaite à partir du dépôt ouvert assurant le plus bas coût de transport. Or, puisque les demandes ne peuvent être satisfaites par les dépôts qu'à partir des envois des clients aux dépôts, cette propriété n'est pas automatiquement vérifiée par les formulations du problème que nous étudions.

4. SOUS-PROBLÈMES ET RELAXATIONS

Nous présentons dans cette section certains problèmes obtenus à partir de la formulation initiale (L), soit en fixant les valeurs de certaines variables, soit en relaxant certaines contraintes. Ces formulations sont utiles pour les algorithmes de résolution envisagés.

Lorsque, dans la formulation (L), les variables y_j sont fixées aux valeurs $\bar{y}_j$, on obtient le sous-problème qui suit :

$$(L(\bar{y})) \quad \text{Minimiser } z = \sum_{p\in P} \Big[\sum_{i\in C} \sum_{j\in D} (c_{ijp}x_{ijp} + c_{jip}x_{jip}) + \sum_{k,j\in \bar{D}} s_{jkp}w_{jkp} \Big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in \bar{D}} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in \bar{D}} x_{jip} = D_{ip}$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in \bar{D}} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in \bar{D}} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in \bar{D},\ p\in P$$

$$x_{ijp}, x_{jip}, w_{jkp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P,\ j,k\in D$$

$$x_{ijp} = x_{jip} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D\ \bar{D},\ i\in C,\ p\in P$$

$$w_{jkp} = w_{kjp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D\ \bar{D},\ k\in D,\ p\in P$$

$$\bar{D} = \{j \mid \bar{y}_j = 1\} .$$

Ce problème possède la propriété qui suit :

Proposition 3 $(L(\bar{y}))$ est un problème de multiflot à coût minimum sans capacité.

Preuve : Considérons le réseau $G=(N,A)$ présenté à la figure 1 et défini comme suit :

$N = C \cup \bar{D} \cup C'$ and $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ où :

$C' = \{r \mid r=n+i$, pour tout $i \in C\}$

et

$A_1 = \{(r,s) \mid r \in C,\ s \in \bar{D}\}$

$A_2 = \{(r,s) \mid r \in \bar{D},\ s \in C'\}$

$A_3 = \{(r,s) \mid r,s \in \bar{D}\}$

De plus, soit :

$$\begin{cases} a_{ijp} = c_{ijp} \text{ et } z_{ijp} = x_{ijp} & \text{pour tout } (i,j) \in A_1, \\ a_{ji'p} = c_{jip} \text{ et } z_{ji'p} = x_{jip} & \text{pour tout } (j,i') \in A_2 \\ & \text{où } i'=n+i \text{ et } i \in C, \\ a_{jkp} = s_{jkp} \text{ et } z_{jkp} = w_{jkp} & \text{pour tout } (j,k) \in A_3, \\ & \text{for all } p \in P. \end{cases}$$

Le problème $(L(\bar{y}))$ peut alors être réécrit comme suit :

$$(L(\bar{y})) \quad \text{Minimiser } z = \sum_{p \in P} \sum_{(r,s) \in A} a_{rsp} z_{rsp}$$

sujet à

$$\sum_{(r,s) \in A} z_{rsp} - \sum_{(s,r) \in A} z_{srp} = \begin{cases} 0_{rp} & \text{pour tout } r \in C,\ p \in P \\ 0 & \text{pour tout } r \in \bar{D},\ p \in P \\ -D_{rp} & \text{pour tout } r \in C',\ p \in P \end{cases}$$

$$z_{rsp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } (r,s) \in A,\ p \in P$$

ce qui est un problème de multiflot à coût minimum. C.Q.F.D.

Notons qu'il n'y a pas d'arcs du type (i,i) dans ce réseau; on ne peut donc pas satisfaire la demande d'un noeud à partir de sa propre offre. Ceci est normal du fait du niveau de planification stratégique, et non pas opérationnelle du modèle, qui conduit à agréger les offres et les demandes sur une longue période. Le problème (L($\bar{y}$)) est facile à résoudre en utilisant les techniques de résolution des problèmes de multiflot à coût minimum, d'autant plus qu'il est décomposable par produit en λ sous-problèmes de flot mutuellement indépendants.

Il s'avère souvent nécessaire de calculer une borne inférieure sur la valeur de l'objectif à l'optimum du problème (L), en relaxant les contraintes d'intégralité sur les variables y_j. En accord avec la terminologie traditionnelle, spécifions les relaxations forte (SRL) et faible (WRL) du problème :

$$\text{Minimiser } z = \sum_{j\in D} f_j y_j + \sum_{p\in P} \Big[\sum_{i\in C} \sum_{j\in D} (c_{ijp}x_{ijp} + c_{jip}x_{jip}) + \sum_{j\in D} \sum_{k\in D} s_{kjp} w_{kjp} \Big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = D_{ip}$$

(SRL)
$$x_{ijp} \leq O_{ip} y_j \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \quad (8)$$
$$x_{jip} \leq D_{ip} y_j$$

(WRL)
$$\sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (x_{ijp} + x_{jip}) \leq \Big[\sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (O_{ip} + D_{ip}) \Big] y_j \qquad \text{pour tout } j\in D \quad (9)$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp}, x_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } k, j\in D,\ p\in P$$

$$y_j \geq 0 \qquad \text{pour tout } j\in D.$$

Les formulations équivalentes pour le modèle normalisé s'appelleront (SRLN) et (WRLN) respectivement.

Le problème (SRL) ne diffère du problème de multiflot ($L(\bar{y})$) que par les contraintes (8). Celles-ci peuvent être interprétées comme des contraintes de capacité variable sur les variables de flot x_{ijp} et x_{jip}. Un tel problème est généralement difficile à résoudre (voir par exemple, Schrage, 1975, 1978) ce qui n'est pas le cas pour le problème (WRL). En effet, il suffit de remarquer qu'à l'optimum pour ce second problème :

$$y_j = \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (x_{ijp}+x_{jip}) / \Delta \qquad \text{pour tout } j\in D \qquad (10)$$

où $$\Delta = \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (O_{ip}+D_{ip})$$

Ce résultat est dû au fait que y_j n'apparaît que dans une et une seule contrainte du problème (de type (9)), et que son coût dans la fonction objectif, f_j, est non-négatif. Ainsi, on peut reformuler (WRL) en remplaçant y_j par l'expression définie en (10), pour obtenir un problème équivalent (WRL1) :

(WRL1) Minimiser $$z= \sum_{p\in P} \Big[\sum_{i\in C} \sum_{j\in D} \big((c_{ijp}+f_j/\Delta)x_{ijp}+(c_{jip}+f_j/\Delta)x_{jip}\big) + \sum_{k\in D} \sum_{j\in D} s_{kjp}w_{kjp}\Big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = D_{ip}$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp}, x_{jip}, w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ k,j\in D,\ p\in P\ .$$

(WRL1) est un problème analogue à ($L(\bar{y})$). Il possède par conséquent la propriété qui suit :

Proposition 4 (WRL1) est un problème de multiflot à coût minimum sans capacité.

Preuve : La preuve est identique à celle de la proposition 3.

Notons que (WRL1) est décomposable par produit en ℓ sous-problèmes de flc$^+$ mutuellement indépendants, tout comme (L($\bar{y}$)). Bien qu'étant plus facile à résoudre que le problème (SRL), (WRL) génère une moins bonne borne inférieure sur la valeur de l'objectif de (L) à l'optimum que (SRL). En effet, les (2 x n x m x ℓ) contraintes de type (8) du problème (SRL) sont agrégées en ℓ contraintes de type (9) pour former (WRL), ce qui agrandit le domaine des solutions possibles.

Une façon d'obtenir une borne supérieure sur la valeur de l'objectif de (L) à l'optimum est de calculer y_j à partir de la solution optimale (x^*,w^*) de (WRL1) de la façon suivante :

$$y_j^* = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe au moins } (i,p), i\in C, p\in P, \text{ tel que } x^*_{ijp} > 0 \text{ ou } x^*_{jip} > 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } j\in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une solution réalisable (y^*,x^*,w^*) pour le problème (L), d'où la génération d'une borne supérieure. Cette borne peut, bien sûr, ne pas être très bonne.

Pour se débarasser des contraintes (7), difficiles à traiter, deux approches peuvent être utilisées : la méthode des pénalités (Zangwill, 1967) et la relaxation lagrangienne (Bertsekas, 1982, chap. 4).

En appliquant la première approche au problème original (L), on obtient la formulation suivante, notée (PRL) :

$$\begin{aligned} \text{(PRL) Minimiser} = & \sum_{j\in D} f_j y_j + \sum_{p\in P} \Big[\sum_{i\in C} \sum_{j\in D} (c_{ijp}x_{ijp} + c_{jip}x_{jip}) + \sum_{k,j\in D} s_{kjp}w_{kjp} \Big] \\ & + \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} \sum_{j\in D} \Big[K_{ijp} (\text{Min}\{0, O_{ip}y_j - x_{ijp}\})^2 \\ & + K_{jip} (\text{Min}\{0, D_{ip}y_j - x_{jip}\})^2 \Big] \end{aligned}$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = D_{ip}$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp}, x_{jip}, w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j,k\in D,\ p\in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j\in D$$

où K_{ijp} et K_{jip} sont des coefficients de pénalité strictement positifs. Ce problème possède la propriété qui suit lorsqu'on relaxe les contraintes d'intégralité sur les variables y :

Proposition 5 La relaxation forte de (PRL) est un problème de multiflot sans capacité à coûts convexes.

Preuve : Notons d'abord que les domaines réalisables du problème relaxé et de $(L(\bar{y}))$ sont similaires. Ainsi, par la proposition 3, (PRL) possède la structure d'un problème de flot à coût minimum. De plus, le dernier terme (entre crochets) de la fonction objectif de (PRL), relatif aux fonctions de pénalité, est clairement convexe; la fonction objectif est par conséquent convexe, ce qui complète la preuve de cette proposition. C.Q.F.D.

Dans le but de résoudre (PRL), il pourrait être avantageux d'adapter les techniques de de relaxation développées par Bertsekas (1985) - voir aussi Bertsekas, Hossein et Tseng (1985). Nous comptons travailler en ce sens dans un proche avenir.

La relaxation lagrangiennne du problème (L), par rapport aux contraintes (7), implique la résolution du problème suivant, où γ_{ijp} et γ_{jip} sont des multiplicateurs de Lagrange non négatifs :

$$(\text{LRL}(\gamma))\ \text{Minimiser } z = \sum_{j\in D} f_j y_j + \sum_{p\in P}\Big[\sum_{i\in C}\sum_{j\in D}(c_{ijp}x_{ijp}+c_{jip}x_{jip}) + \sum_{j\in D}\sum_{k\in D} s_{kjp}w_{kjp}\Big] + \sum_{p\in P}\sum_{i\in C}\sum_{j\in D}\big[\gamma_{ijp}(x_{ijp}-O_{ip}y_j) + \gamma_{jip}(x_{jip}-D_{ip}y_j)\big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = O_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = D_{ip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{i\in C} x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp}, x_{jip}, w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j,k\in D,\ p\in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j\in D$$

Ce problème possède la propriété suivante lorsqu'on relaxe les contraintes d'intégralité sur les variables y :

Proposition 6 La relaxation forte de (LRL(γ)) est un problème (linéaire) de multiflot à coût minimum sans capacité.

Preuve : Notons d'abord que l'ensemble des solutions réalisables du problème relaxé et de ($L(\bar{y})$) sont similaires. De plus, la fonction objectif de (LRL(γ)) est clairement linéaire. Par conséquent, par la proposition 3, (LRL(γ)) possède la structure d'un problème (linéaire) de multiflot à coût minimum. C.Q.F.D.

Dans le but de trouver une solution optimale au problème (L), on pourrait par exemple résoudre (LRL(γ)) pour un certain γ, pour ensuite réajuster les multiplicateurs afin d'améliorer l'objectif tout en satisfaisant les conditions de complémentarité suivantes :

$$\gamma_{ijp}(x_{ijp} - O_{ip}y_j) = 0$$

$$\gamma_{jip}(x_{jip} - D_{ip}y_j) = 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P.$$

Cette procédure doit être répétée jusqu'à ce qu'on ne puisse plus améliorer l'objectif de (LRL(γ)). Nous envisageons de tester cette approche dans un proche averir.

5. DUALISATION

Pour déterminer les caractéristiques duales du problème original (L), nous travaillerons à partir du modèle normalisé soumis à la relaxation forte :

$$\text{(SRLN)}\quad \text{Minimiser } z^P(y,x,w) = \sum_{j\in D} f_j y_j + \sum_{p\in P}\Big[\sum_{i\in C}\sum_{j\in D}(C_{ijp}x_{ijp} + C_{jip}x_{jip}) + \sum_{k\in D}\sum_{j\in D} s_{kjp}w_{kjp}\Big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = 1 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P \qquad (u_{ip})$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = 1 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P \qquad (v_{ip})$$

$$x_{ijp} \leq y_j \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \qquad (\gamma_{ijp})$$

$$x_{jip} \leq y_j \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \qquad (\gamma_{jip})$$

$$\sum_{i\in C} O_{ip}x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} D_{ip}x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \qquad (\lambda_{jp})$$

$$\text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp}, x_{jip}, w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j,k\in D,\ p\in P$$

$$y_j \geq 0 \qquad \text{pour tout } j\in D$$

où :

$$C_{ijp} = O_{ip}c_{ijp}$$

$$C_{jip} = D_{ip}c_{jip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P\ .\quad (11)$$

Soit (y^*,x^*,w^*) la solution optimale de (SRLN). u_{ip}, v_{ip}, γ_{ijp}, γ_{jip} et λ_{jp} étant les variables duales associées aux contraintes de ce problème, la formulation duale de (SRLN), notée (DLN), est la suivante :

(DLN) Maximiser $z^D(u,v,\gamma,\lambda) = \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (u_{ip}+v_{ip})$

sujet à

$$u_{ip} - \gamma_{ijp} + O_{ip}\lambda_{jp} \leq C_{ijp} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$v_{ip} - \gamma_{jip} - D_{ip}\lambda_{jp} \leq C_{jip} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$\sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (\gamma_{ijp}+\gamma_{jip}) \leq f_j \qquad \text{pour tout } j\in D$$

$$\lambda_{jp} - \lambda_{kp} \leq s_{kjp} \qquad \text{pour tout } k,j\in D,\ p\in P$$

$$\gamma_{ijp},\ \gamma_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P\ .$$

Les conditions de complémentarité entre les deux problèmes à l'optimum sont par conséquent les suivantes :

$$\underbrace{(y_j - x_{ijp})}_{\geq 0}\ \underbrace{\gamma_{ijp}}_{\geq 0} = 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \qquad (12)$$

$$\underbrace{(y_j - x_{jip})}_{\geq 0}\ \underbrace{\gamma_{jip}}_{\geq 0} = 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \qquad (13)$$

$$\underbrace{(C_{ijp} - u_{ip} + \gamma_{ijp} - O_{ip}\lambda_{jp})}_{\geq 0}\ \underbrace{x_{ijp}}_{\geq 0} = 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \qquad (14)$$

$$\underbrace{(C_{jip} - v_{ip} + \gamma_{jip} + D_{ip}\lambda_{jp})}_{\geq 0}\ \underbrace{x_{jip}}_{\geq 0} = 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P \qquad (15)$$

$$\underbrace{(f_j - \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (\gamma_{ijp}+\gamma_{jip}))}_{\geq 0}\ \underbrace{y_j}_{\geq 0} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D \qquad (16)$$

$$\underbrace{(s_{kjp} - \lambda_{jp} + \lambda_{kp})}_{\geq 0}\ \underbrace{w_{kjp}}_{\geq 0} = 0 \qquad \text{pour tout } k,j\in D,\ p\in P \qquad (17)$$

Examinons la structure du problème dual lorsque les variables λ_{jp} sont fixées à des valeurs $\bar{\lambda}_{jp}$ telles que :

$$\bar{\lambda}_{jp} - \bar{\lambda}_{kp} \leq s_{kjp} \qquad \text{pour tout } k,j \in D,\ p \in P.$$

Nous obtenons alors la formulation suivante :

$$(DLN(\bar{\lambda})) \quad \text{Maximiser } z^D(u,v,\gamma|\bar{\lambda}) = \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (u_{ip}+v_{ip})$$

sujet à

$$u_{ip} - \gamma_{ijp} \leq (C_{ijp} - O_{ip}\bar{\lambda}_{jp}) \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$v_{ip} - \gamma_{jip} \leq (C_{jip} + D_{ip}\bar{\lambda}_{jp}) \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$\sum_{p\in P} \sum_{i\in C} (\gamma_{ijp}+\gamma_{jip}) \leq f_j \qquad \text{pour tout } j \in D$$

$$\gamma_{ijp}, \gamma_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P.$$

Le dual de $(DLN(\bar{\lambda}))$, noté $(SRLN(\bar{\lambda}))$, se formule comme suit :

$$(SRLN(\bar{\lambda})) \quad \text{Minimiser } z^P(y,x|\bar{\lambda}) = \sum_{j\in D} f_j y_j$$

$$+ \sum_{p\in P} \sum_{i\in C} \sum_{j\in D} \{(C_{ijp} - O_{ip}\bar{\lambda}_{jp})x_{ijp} + (C_{jip} + D_{ip}\bar{\lambda}_{jp})x_{jip}\}$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = 1 \qquad \text{pour tout } i \in C,\ p \in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = 1$$

$$x_{ijp} \leq y_j \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$x_{jip} \leq y_j$$

$$y_j \geq 0 \qquad \text{pour tout } j \in D$$

$$x_{ijp}, x_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P.$$

On peut facilement voir que $(SRLN(\bar{\lambda}))$ est une relaxation linéaire forte d'un modèle de localisation simple sans capacité. On peut alors le résoudre par la méthode duale de Erlenkotter (1978).

Les constantes $\bar{\lambda}_{jp}$ jouent un rôle très particulier dans ce problème : elles permettent de refléter l'état de déséquilibre du système aux différents dépôts; en effet :

- Si $\bar{\lambda}_{jp}$ est un réel positif relativement grand, le dépôt j devrait attirer plus de flot de produit p qu'il n'en délivre aux clients, puisque le coût initial de x_{ijp} (i.e. C_{ijp}) diminue et celui de x_{jip} augmente. $\bar{\lambda}_{jp}$ semble alors traduire le fait que le dépôt j tend à manquer de ce produit.
- Si $\bar{\lambda}_{jp}$ est un réel négatif relativement petit, on observe le phénomène inverse : le dépôt j devrait envoyer plus de flot de produit p aux clients qu'il n'en reçoit. $\bar{\lambda}_{jp}$ semble alors indiquer que le dépôt j tend à avoir un surplus de ce produit.

Soit $(\bar{y},\bar{x})$ la solution optimale de (SRLN($\bar{\lambda}$)). En fixant les variables y et x du problème (SRLN) à ces valeurs, nous obtenons la formulation suivante :

(LN($\bar{y},\bar{x}$)) Minimiser $z^P(w|\bar{y},\bar{x}) = \sum_{p\in P}\sum_{k\in D}\sum_{j\in D} s_{kjp}w_{kjp}$

sujet à

$$\sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = \sum_{i\in C}(D_{ip}\bar{x}_{jip} - O_{ip}\bar{x}_{ijp}) \qquad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } k,j\in D, p\in P.$$

Ce problème est la combinaison de ℓ sous-problèmes de flot à coût minimum (un par produit) mutuellement indépendants. Soit $\bar{w}$ la solution optimale de (LN($\bar{y},\bar{x}$)). L'information obtenue jusqu'à maintenant permet de borner la valeur de l'objectif de (SRLN) à l'optimum, $z^P(y^*,x^*,w^*)$:

Proposition 7

$$z^P(\bar{y},\bar{x}|\bar{\lambda}) \leq z^P(y^*,x^*,w^*) \leq z^P(\bar{y},\bar{x},\bar{w})$$

Preuve :

i) Notons tout d'abord que $z^P(\bar{y},\bar{x}|\bar{\lambda})$ est égale à la valeur optimale de l'objectif de (DLN($\bar{\lambda}$)); $z^P(\bar{y},\bar{x}|\bar{\lambda})$ est par conséquent une borne inférieure sur la valeur de $z^P(u,v,\gamma,\lambda)$ à l'optimum, d'où sur $z^P(y^*,x^*,w^*)$.

ii) Notons que $(\bar{y},\bar{x},\bar{w})$ est réalisable pour le problème (SRLN); il en découle que $z^P(\bar{y},\bar{x},\bar{w})$ est une borne supérieure sur la valeur de $z^P(y,x,w)$ à l'optimum. C.Q.F.D.

Soulignons pour terminer que la résolution de (SRLN($\bar{\lambda}$)) suivie de celle de (SRLN($\bar{y},\bar{x}$)), où $\bar{\lambda}_{jp} = 0$, pour tout $j\in D$, $p\in P$, revient à utiliser l'heuristique développée par Dejax et coll. (1986).

Un second résultat intéressant, découlant de la formulation duale (DLN), survient lorsque les variables γ_{ijp} et γ_{jip} sont fixées aux valeurs $\bar{\gamma}_{ijp}$ et $\bar{\gamma}_{jip}$ respectivement. Ces valeurs doivent être telles que :

$$\sum_{p\in P}\sum_{i\in C}(\bar{\gamma}_{ijp}+\bar{\gamma}_{jip}) \leq f_j \qquad \text{pour tout } j\in D$$

$$\bar{\gamma}_{ijp} \geq 0 \quad \bar{\gamma}_{jip} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P.$$

Nous obtenons alors le problème suivant :

(DLN($\bar{\gamma}$)) Maximiser $z^D(u,v,\lambda|\bar{\gamma}) = \sum_{p\in P}\sum_{i\in C}(u_{ip}+v_{ip})$

sujet à

$$\left.\begin{aligned} u_{ip} + O_{ip}\lambda_{jp} &\leq (C_{ijp}+\bar{\gamma}_{ijp}) \\ v_{ip} - D_{ip}\lambda_{jp} &\leq (C_{jip}+\bar{\gamma}_{jip}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$$\lambda_{jp}-\lambda_{kp} \leq s_{kjp} \qquad \text{pour tout } k,j\in D,\ p\in P.$$

Le dual de (DLN($\bar{\gamma}$)), noté (SRLN($\bar{\gamma}$)), se formule comme suit :

$$(SRLN(\bar{\gamma})) \text{ Minimiser } z^P(x,w|\bar{\gamma}) = \sum_{p\in P}\Big[\sum_{k\in D} \sum_{j\in D} s_{kjp}w_{kjp} + \sum_{i\in C}\sum_{j\in D}((C_{ijp}+\bar{\gamma}_{ijp})x_{ijp}+(C_{jip}+\bar{\gamma}_{jip})x_{jip})\Big]$$

sujet à

$$\sum_{j\in D} x_{ijp} = 1 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{j\in D} x_{jip} = 1 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ p\in P$$

$$\sum_{i\in C} O_{ip}x_{ijp} + \sum_{k\in D} w_{kjp} - \sum_{i\in C} D_{ip}x_{jip} - \sum_{k\in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j\in D,\ p\in P$$

$$x_{ijp},\ x_{jip},\ w_{kjp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } i\in C,\ j,k\in D,\ p\in P.$$

$(SRLN(\bar{\gamma}))$ possède la propriété suivante :

Proposition 8 $(SRLN(\bar{\gamma}))$ est un problème de multiflot à coût minimum sans capacité.

Preuve : $(SRLN(\bar{\gamma}))$ étant analogue au problème $(L(\bar{y}))$, la preuve de cette proposition est la même que celle de la proposition 3.

Les constantes $\bar{\gamma}_{ijp}$ et $\bar{\gamma}_{jip}$ permettent d'ajuster les coûts de transport client-dépôt et dépôt-client pour tenir compte du coût d'ouverture et d'opération du dépôt j. En effet, les conditions de complémentarité (12) et (13) nous indiquent que

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{ijp} > 0 \Rightarrow y_j = x_{ijp}\\ &\gamma_{jip} > 0 \Rightarrow y_j = x_{jip}\\ &y_j > x_{ijp} \Rightarrow \gamma_{ijp} = 0\\ &y_j > x_{jip} \Rightarrow \gamma_{jip} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour tout } i\in C,\ j\in D,\ p\in P$$

$\bar{\gamma}_{ijp}$ et $\bar{\gamma}_{jip}$ représentent par conséquent les prix à payer pour augmenter la valeur de y_j, ou en quelque sorte pour "ouvrir" le dépôt j.

Soit $(\bar{x},\bar{w})$ la solution optimale de $(SRLN(\bar{\gamma}))$. Calculons y_j comme suit :

$$\bar{y}_j = \max_{i \in C, p \in P} \{\bar{x}_{ijp}, \bar{x}_{jip}\} \qquad \text{pour tout } j \in D.$$

A partir de ces résultats, nous pouvons à nouveau borner la valeur de l'objectif de (SRLN) à l'optimum :

Proposition 9

$$z^P(\bar{x},\bar{w}|\bar{\gamma}) \leq z^P(y^*,x^*,w^*) \leq z^P(\bar{y},\bar{x},\bar{w}) \quad .$$

Preuve :

i) Notons tout d'abord que $(\bar{y},\bar{x},\bar{w})$ est réalisable pour le problème (SRLN), d'où l'existence d'une borne supérieure sur $z^P(y^*,x^*,w^*)$.

ii) $z^P(\bar{x},\bar{w}|\bar{\gamma})$ étant égal à la valeur optimale de l'objectif de (DLN($\bar{\gamma}$)), il constitue une borne inférieure sur la valeur de $z^D(u,v,\gamma,\lambda)$ à l'optimum, d'où sur $z^P(y^*,x^*,w^*)$. C.Q.F.D.

Mentionnons pour terminer que les problèmes (SRLN($\bar{\lambda}$)) et (SRLN($\bar{\gamma}$)) pourraient être utilisés en commun pour trouver des bornes inférieure et supérieure sur la valeur optimale de la fonction objectif de (LN); en effet, il suffit de les résoudre de façon cyclique, en se servant des résultats de l'un pour la résolution de l'autre. Cette procédure ne converge malheureusement pas nécessairement vers la solution optimale de (SRLN).

6. LE MODÈLE LINÉAIRE RESTRICTIF

Le modèle linéaire restrictif constitue une variante du modèle initial où chaque client ne peut être assigné qu'à un et un seul dépôt. Notons que dans la littérature concernant le problème classique de localisation (SPLP), cette distinction n'a pas à être faite puisque ce problème possède la propriété d'affectation unique (Erarup et Pruzan, 1983). Dans le cas présent, cette propriété n'est pas vérifiée, car les contraintes de rééquilibrage peuvent forcer la multiplication des affectations.

Remarquons également qu'on ne peut pas parler d'un seul modèle restrictif lorsque plusieurs produits et des exigences de rééquilibrage

sont présents. En effet, de nombreux modèles sont possibles selon que l'affectation unique l'est pour tous les échanges client-dépôt ou seulement pour un sous-ensemble. Nous spécifions, dans ce qui suit, deux de ces formulations.

Nous assumons les mêmes hypothèses sur la non-négativité des offres et demandes et sur les relations entre coûts d'équilibrage que pour le modèle (L). Nous allons donc écrire directement les formulations simplifiées sans poser et démontrer les propositions, équivalentes à la proposition 1, qui les justifient.

La formulation la plus restrictive est celle où chaque client est affecté à un seul dépôt pour tous ses échanges. Dans ce cas nous avons :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est affecté au dépôt } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad i \in C,\ j \in D$$

$$x = (x_{ij})$$

$$c_{ijp}(x) = c_{ijp} O_{ip} x_{ij}$$

$$c_{jip}(x) = c_{jip} D_{jp} x_{ij} \qquad i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

et le modèle s'écrit :

(LU) Minimiser $$z = \sum_{j \in D} f_j y_j$$

$$+ \sum_{p \in P} \sum_{i \in C} \sum_{j \in D} (c_{ijp} O_{ip} + c_{jip} D_{ip}) x_{ij}$$

$$+ \sum_{p \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} s_{jkp} w_{jkp}$$

sujet à

$$\sum_{j \in D} x_{ij} = 1 \qquad \text{pour tout } i \in C$$

$$x_{ij} \leq y_j \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D$$

$$\sum_{i \in C} O_{ip} x_{ij} + \sum_{k \in D} w_{kjp} - \sum_{i \in C} D_{ip} x_{ij} - \sum_{k \in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j \in D,\ p \in P$$

$$w_{jkp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } j,k \in D,\ p \in P$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j \in D.$$

A l'autre extrémité, le modèle restrictif désagrégé (LUD) permet une affectation unique pour chaque produit, dans chaque direction, des clients aux dépôts. Définissons :

$$x_{ijp(jip)} = \begin{cases} 1 & \text{si le client i envoie (reçoit) tous ses véhicules de type p au (du) dépôt j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$x = (x_{ijp},\ x_{jip})$$

$$c_{ijp}(x) = c_{ijp} O_{ip} x_{ijp}$$

$$c_{jip}(x) = c_{jip} D_{ip} x_{jip}$$

et le modèle s'écrit

$$\text{(LUD)} \quad \text{Minimiser } z = \sum_{j \in D} f_j y_j + \sum_{p \in P} \Big[\sum_{i \in C} \sum_{j \in D} (c_{ijp} O_{ip} x_{ijp} + c_{jip} D_{ip} x_{jip}) + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} s_{jkp} w_{jkp}$$

sujet à

$$\sum_{j \in D} x_{ijp} = 1 \qquad \text{pour tout } i \in C,\ p \in P$$

$$\sum_{j \in D} x_{jip} = 1$$

$$x_{ijp} \leq y_j \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$x_{jip} \leq y_j$$

$$\sum_{i \in C} O_{ip} x_{ijp} + \sum_{k \in D} w_{kjp} - \sum_{i \in C} D_{ip} x_{jip} - \sum_{k \in D} w_{jkp} = 0 \qquad \text{pour tout } j \in D,\ p \in P$$

$$w_{jkp} \geq 0 \qquad \text{pour tout } j,k \in D,\ p \in P$$

$$x_{ijp},\ x_{jip} \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } i \in C,\ j \in D,\ p \in P$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } j \in D.$$

Nous ne croyons pas nécessaire de détailler toutes les formulations intermédiaires. Selon l'application, un ou l'autre de ces modèles sera approprié. Il est cependant clair que toutes ces formulations partagent la même structure et qu'un algorithme efficace pour l'une devrait l'être pour toutes les autres. L'effort de calcul devrait cependant être différent, le nombre de variables entières augmentant avec le degré de désagrégation du modèle.

Notons finalement que la structure de réseau observée dans les modèles non restrictifs se retrouve également chez les modèles restrictifs. Nous croyons donc possible d'étendre à ces derniers les études caractérielles et algorithmiques effectuées pour les premiers.

7. TRAVAUX EN COURS ET ENVISAGÉS

Ce rapport nous permet d'envisager plusieurs avenues pour l'élaboration de méthodes de résolution efficaces du modèle linéaire de localisation-distribution avec équilibrage :

i) Nous mettons présentement au point un algorithme d'énumération de type "Branch-and-Bound" basé sur les travaux de Effroymson et Ray (1966) ainsi que Khumawala (1972). L'emphase est mise sur le calcul efficace de bornes et sur l'identification de bonnes règles de branchement. Les diverses approches de relaxation étudiées dans ce rapport seront testées; nous nous servirons également des travaux de Geoffrion et McBride (1978) ainsi que de Aikens (1982).

ii) Nous travaillons également au développement de plusieurs procédures duales, basées sur la méthode d'Erlenkotter (1978) faisant appel aux relations de complémentarité entre les formes primale et duale de la relaxation linéaire du problème. Le logiciel d'Erlenkotter, appelé DUALOC, semble éclipser tous les autres algorithmes pour la résolu-

tion du modèle de localisation sans capacité. Nous croyons qu'une telle approche donnera aussi de bons résultats pour le présent problème.

iii) Nous examinerons également les approches de décompositon, en particulier la méthode de Benders (Benders, 1972; Magnanti et Wong, 1977). Cette méthode, utilisée avec succès par Geoffrion et Graves (1974; aussi Geoffrion et coll., 1978), devrait bien s'adapter à notre problème car lors de la décomposition on peut retrouver des sous-problèmes pour lesquels de bons algorithmes sont connus : localisation simple et multiflots à coût minimum.

iv) Outre leurs utilités dans les algorithmes d'énumération et de décomposition, la structure du problème permet aussi d'envisager, comme nous l'avons vu, l'utilisation des techniques de relaxation lagrangienne directement comme méthode de solution. Dans ce contexte, nous voulons étudier les méthodes de relaxation pour les problèmes de réseaux (Bertsekas, 1985; Bertsekas, Hossein et Tseng, 1985).

v) Finalement, nous évaluerons la possibilité d'adapter l'heuristique dite "greedy interchange" développé par Kuehn et Hamburger (1963) - voir aussi Cornuejols, Fisher et Nemhauser (1977). Cette heuristique pourrait s'avérer intéressante en ce sens qu'elle pourrait générer de bonnes bornes sur la valeur de l'objectif à l'optimum, et ce avec peu d'efforts de calcul.

Nous étudierons lors d'une étape ultérieure deux extensions du modèle linéaire qui présentent un intérêt tout particulier : la considération intégrée des mouvements pleins et vides et l'existence de capacités à certains ou à tous les dépôts. Le cas des coûts non-linéaires est compliqué du fait que des techniques de programmation linéaire sont sous-enten-

dues dans presque tous les algorithmes proposés pour le modèle actuel. Nous examinerons donc tant les approches de linéarisation des fonctions de coût pour utiliser ces algorithmes, que des techniques de résolution directes, telle la méthode généralisée de décomposition de Benders (Geoffrion, 1972). Nous nous attaquerons à ce problème après avoir complété l'étude du cas linéaire.

RÉFÉRENCES

AIKENS III, C.H. (1982). "The Optimal Design of a Physical Distribution System on a Multi-Commodity Multi-Echelon Network", Ph.D. Thesis, University of Tennessee.

BENDERS, J.F. (1972). "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematik 4, 238-252.

BERTSEKAS, D.P. (1982), "Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods". Academic Press, New York.

BERTSEKAS, D.P. (1985). "A Unified Framework for Primal-Dual Methods in Minimum Cost Network Flow Problems", Mathematical Programming 32, 125-145.

BERTSEKAS, D.P., HOSSEIN, P.A. et TSENG, P. (1985). "Relaxation Methods for Network Flow Problems with Convex Arc Costs", rapport LIDS-P-1523, Massachusetts Institute of Technology.

CORNUEJOLS, G., FISHER, M.L. et NEMHAUSER, G.L. (1977). "Location of Bank Accounts to Optimize Float : An Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms", Management Science 23, 789-810.

CORNUEJOLS, G., NEMHAUSER, G.L. et WOLSEY, L.A. (1983). "The Uncapacitated Facility Location Problem", in Discrete Location Theory, R.L. Francis et P. Mirchandini (eds.) Wiley-Interscience (à paraître).

DEJAX, P.J., DURAND, Thy. et SERVANT, F. (1986). "A Planning Model for Loaded and Empty Container Ground Transportation", TIMS/ORSA National Meeting, Los Angeles.

DEJAX, P.J. et CRAINIC, T.G. (1986), "Models for Empty Freight Vehicle Transportation Logistics", publication #482, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

EFFROYMSON, M.A. et RAY, T.L. (1966). "A Branch and Bound Algorithm for Plant Location", Operations Research 14, 361-368.

ERLENKOTTER, D. (1978). "A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location", Operations Research 26, 992-1009.

GEOFFRION, A.M. (1972). "Generalized Benders Decompositions", Journal of Optimisation Theory and Applications 10, 4, 237-260.

GEOFFRION, A.M. et GRAVES, G.W. (1974). "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition". Management Science 20, 822-844.

GEOFFRION, A.M., GRAVES, G.W. et LEE, S. (1978). "Strategic Distribution System Planning : A Status Report", Chapter 7 in A. Hax (ed.), Studies in Operations Management, North-Holland/American Elsevier.

GEOFFRION, A.M. et McBRIDE, R. (1978) "Lagrangean Relaxation Applied to the Capacitated Facility Location Problem", AIIE Transactions 10, 40-47.

KHUMAWALA, B.M. (1972). "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem", Management Science 18B, 718-731.

KRARUP, J. et PRUZAN, P.M. (1983). "The Simple Plant Location Problem : Survey and Synthesis", European Journal of Operational Research 12, 36-81.

KUEHN, A.A. et HAMBURGER, M.J. (1963). "A Heuristic Program for Locating Warehouses", Management Science 9, 643-666.

MAGNANTI, T.L. et WONG, R.T. (1977). "Accelerating Benders Decomposition : Algorithmic Enhancement and Model Selection Criteria", Operations Research 29, 464-484.

SCHRAGE, L. (1975). "Implicit Representation of Variable Upper Bound in Linear Programming". Mathematical Programming Study 4, 119-132.

SCHRAGE, L. (1978). "Implicit Representation of Generalized Variable Upper Bounds in Linear Programming". Mathematical Programming 14, 11-20.

ZANGWILL, W.I. (1967). "Nonlinear Programming Via Penalty Functions". Management Science 13, 344-358